Probleme diverse

Clasa a X-a

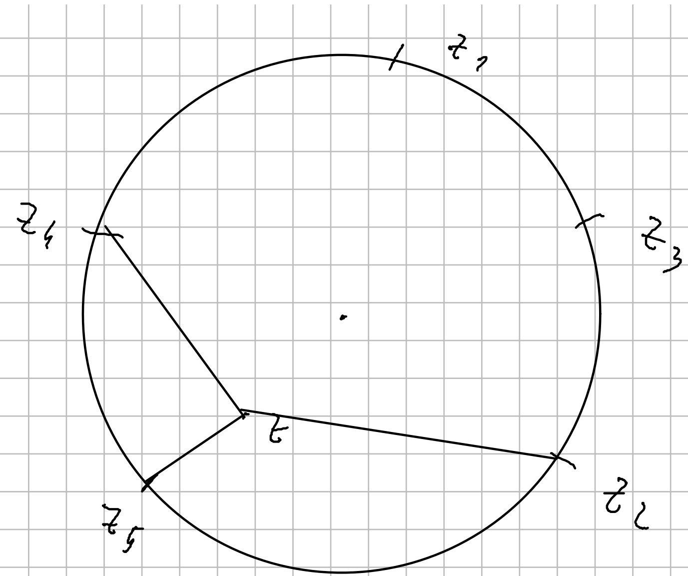
① $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ $\quad |z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$

Știm $\sum\limits_{1 \le i < j \le n} |z_i - z_j|^2 = n^2$

Arătați că, $(\forall)\ z \in \mathbb{C}$, $\sum\limits_{i=1}^{n} |z - z_i|^2 \geq n$

② **Problema** *Fie n puncte în plan ($n \geq 2$), aflate în interiorul unui cerc de rază 1. Arătați că există două dintre ele aflate la distanță mai mică sau egală cu* $\sqrt{\frac{2n}{n-1}}$.
Dacă, în plus, cele n puncte au centrul de greutate la distanța $\frac{1}{2}$ *de centrul cercului, arătați că există două dintre ele aflate la distanță mai mică sau egală cu* $\sqrt{\frac{3n}{2(n-1)}}$.

① Soluție:



$$|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - 2\,\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$
$$= 2 - 2\,\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)\,\overline{(z_1 - z_2)}$$
$$= z_1 \cdot \overline{z_1} - z_1 \cdot \overline{z_2} - z_2 \cdot \overline{z_1} + z_2 \cdot \overline{z_2}$$
$$= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1})$$
$$= 2 - (z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1})$$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \rightsquigarrow \frac{z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}}{2} = \mathrm{Re}\,(z_1 \cdot \overline{z_2})$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} |z_i - z_j|^2 = \sum_{1 \le i < j \le n} \left(|z_i|^2 + |z_j|^2 - z_i \overline{z_j} - z_j \overline{z_i} \right)$$

$$= (n-1) \cdot \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 - \sum_{i \ne j} z_i \overline{z_j}$$

$$= (n-1) \cdot n - \sum_{i \ne j} z_i \overline{z_j}$$

$$\sum_{1 \le i < j \le n} |z_i - z_j|^2 = n^2 \Rightarrow \sum_{i \ne j} z_i \overline{z_j} = -n$$

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2 =$$

$$= (z_1 + z_2 + \dots + z_n)(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \dots + \overline{z_n})$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 + \sum_{i \ne j} z_i \overline{z_j}$$

$$= n - n = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$$

$$\sum_{i=1}^{n} |z - z_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(|z|^2 - z\overline{z_i} - \overline{z} z_i + |z_i|^2 \right)$$

$$= n \cdot |z|^2 - z \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{z_i} \right)}_{=0} - \overline{z} \cdot \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} z_i \right)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$$

$$= n \cdot |z|^2 + n \ge n$$

Problema *Fie n puncte în plan ($n \geq 2$), aflate în interiorul unui cerc de rază 1. Arătați că există două dintre ele aflate la distanță mai mică sau egală cu $\sqrt{\frac{2n}{n-1}}$.*

Dacă, în plus, cele n puncte au centrul de greutate la distanța $\frac{1}{2}$ de centrul cercului, arătați că există două dintre ele aflate la distanță mai mică sau egală cu $\sqrt{\frac{3n}{2(n-1)}}$.

② Soluție $z_1, z_2, \dots z_n \in \mathbb{C}$ $\quad |z_i| \leq 1$

$(\exists)\ i \neq j \quad |z_i - z_j| \leq \sqrt{\frac{2n}{n-1}}$

echivalent $|z_i - z_j|^2 \leq \frac{2n}{n-1}$

Presupunem prin absurd că $(\forall)\ i, j \in \{1, 2, \dots n\}$

$i \neq j \Rightarrow |z_i - z_j|^2 > \frac{2n}{n-1}$

Sumăm:
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} |z_i - z_j|^2 > C_n^2 \cdot \frac{2n}{n-1} =$$
$$= n^2$$

$$(n-1)\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right)}_{< n} - \sum_{i \neq j} z_i \cdot \overline{z_j} > n^2$$

$$n(n-1) - \sum_{i \neq j} z_i \overline{z_j} > n^2$$

$$-\sum_{i \neq j} z_i \overline{z_j} > n \Rightarrow \sum_{i \neq j} z_i \cdot \overline{z_j} < -n$$

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2 = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}_{\leq n} + \underbrace{\sum_{i \neq j} z_i \cdot \overline{z_j}}_{< -n} < 0$$

Fals

Deci $(\exists)\ i\neq j$ $|z_i - z_j|^2 \leq \frac{2n}{n-1}$

Partea a doua:

Presupunem prin absurd $(\forall)\ i\neq j$

$$|z_i - z_j|^2 > \frac{3n}{2(n-1)}$$

Sumăm:

$$-\sum_{i\neq j} z_i \overline{z_j} + (n-1)\underbrace{\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2}_{<n} > C_n^2 \cdot \frac{3n}{2(n-1)} =$$

$$= \frac{3n^2}{4}$$

$$\sum z_i \overline{z_j} < n(n-1) - \frac{3n^2}{4} = n^2 - n - \frac{3n^2}{4}$$

$$= \frac{1}{4}n^2 - n$$

$$|z_1 + z_2 + \dots + z_n|^2 = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 + \sum_{i\neq j} z_i \overline{z_j} <$$

$$< n + \frac{1}{4}n^2 - n = \frac{1}{4}n^2$$

Centrul de greutate e la $\frac{1}{2}$ de centrul cercului:

$$\left| \frac{z_1 + z_2 + \dots + z_n}{n} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow |z_1 + \dots + z_n| = \frac{n}{2}$$

$$|z_1 + \dots + z_n|^2 = \frac{n^2}{4}$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Contradicție!

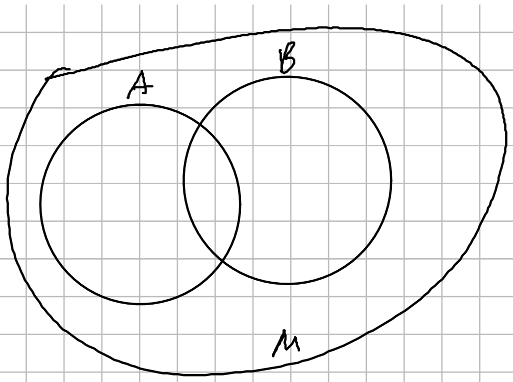
3

Problema . *În câte moduri putem alege perechea ordonată (A, B) de mulțimi ce satisfac următoarele proprietăți:*

(1) $A \cup B \subseteq \{1, 2, \ldots, 1000\} = M$

(2) $B \setminus A \subseteq \{1, 2, \ldots, 500\}$

(3) $A \cap B \subseteq \{300, 301, \ldots, 700\}$



	$A \setminus B$	$A \cap B$	$B \setminus A$	$M \setminus (A \cup B)$	Posibilități	
1	✓		✓	✓	3	299
2	✓		✓	✓	3	
3	⋮				⋮	
⋮	⋮					
299	✓		✓	✓	3	
300	✓	✓	✓	✓	4	201
⋮	⋮				⋮	
500	✓	✓	✓	✓	4	
501	✓	✓		✓	3	200
⋮	⋮				⋮	
700	✓	✓		✓	3	
701	✓			✓	2	300
⋮					⋮	
1000	✓			✓	2	

Nr total de așezări ale numere în A și B:

$$3^{299} \cdot 4^{201} \cdot 3^{200} \cdot 2^{300} = 3^{499} \cdot 2^{702}$$

(4) **Problema** *Fie $A_1, A_2, \dots A_{11}$ submulțimi ale unei mulțimi cu 1000 de elemente.*

1. *(1) Dacă fiecare mulțime A_i cu $i = \overline{1, 11}$ are minim 91 de elemente, arătați că cele 11 mulțimi nu pot fi disjuncte două câte două.*
2. *(2) Dacă fiecare mulțime A_i cu $i = \overline{1, 11}$ are minim 910 elemente, arătați că intersecția celor 11 mulțimi e nevidă.*

(1) Presupunem că $A_i \cap A_j = \emptyset$, $(\forall)\, i \neq j$

Atunci $|A_1 \cup A_2 \cup \dots A_{11}| =$

$= |A_1| + |A_2| + \dots + |A_{11}| \geq 91 \cdot 11 = 1001$ contradicție

	A_1	A_2	A_3	...	A_{11}	
$\#_1$	✓		$\cancel{\checkmark}$			≤ 1
$\#_2$						≤ 1
⋮	✓					
	✓					
$\#_{1000}$						≤ 1
	≥ 91		≥ 91		≥ 91	

Total bife: $\geq 91 \cdot 11$ $\leq 1 \cdot 1000$

	A_1	A_2	A_3	...	A_{11}	
x_1	✓	✓	✓		✓	≤ 10
x_2						≤ 10
$\vdots$	✓					$\vdots$
$\vdots$	✓					$\vdots$
x_{1000}						≤ 10
	≥ 910	≥ 910			≥ 910	

Nr total bife

Pe coloane: $\geq 910 \cdot 11 = 10010$

Pe linii: $\leq 10 \cdot 1000 = 10\,000$

$\Big\}$ Fals!

Există o linie plină $\Rightarrow \bigcap_{i=1}^{11} A_i \neq \emptyset$.

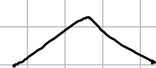
(P5) Fie $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ care duce orice progresie aritmetică într-un șir monoton. Arătați că f e monotonă

Soluție: Presupunem prin absurd că f nu e monotonă

Atunci există $x, y, z \in \mathbb{Q}$

$x < y < z$ și

$$\begin{cases} f(x) < f(y) > f(z) \\ \text{sau} \\ f(x) > f(y) < f(z) \end{cases}$$



Demonstrăm că afirmația de mai sus e adevărată:

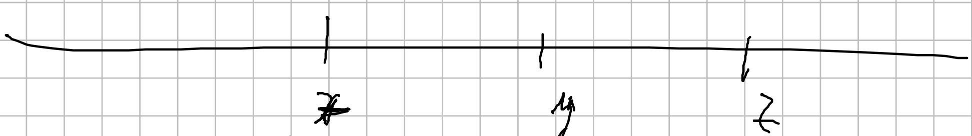
Presupunem prin absurd că $(\forall)\ x, y, z \in \mathbb{Q}$

$$x < y < z \Rightarrow \begin{cases} f(x) \geq f(y) \text{ sau } f(y) \leq f(z), \\ \text{și} \\ f(x) \leq f(y) \text{ sau } f(y) \geq f(z), \end{cases}$$

echivalent cu

$$\begin{cases} f(y) \leq f(z) \text{ și } f(x) \leq f(y) \\ \text{sau} \\ f(x) \geq f(y) \text{ și } f(y) \geq f(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) \leq f(y) \leq f(z) \\ \text{sau} \\ f(x) \geq f(y) \geq f(z) \end{cases}$$



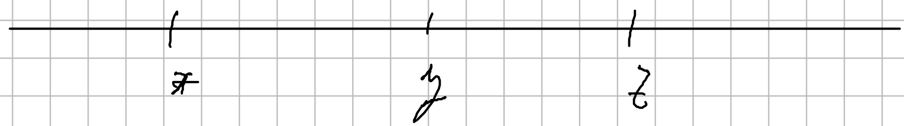
$f(x) < f(y) \leq f(z)$

Ne întoarcem la problemă:

Știm că $(\exists)\ x < y < z$

$$\begin{cases} f(x) < f(y) > f(z) \\ \text{sau} \\ f(x) > f(y) < f(z) \end{cases}$$

Luăm $f(x) < f(y) > f(z)$



Vrem să încadrăm x, y, z într-o progresie aritmetică
adică $(\exists)\ r \in \mathbb{Q}$, $m, n \in \mathbb{N}$

$x + r \cdot m = y$ $\qquad$ $r \cdot m = y - x$

$x + r \cdot n = z$ $\qquad$ $r \cdot n = z - x$

$$\frac{m}{n} = \frac{y-x}{z-x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\exists)\ m, n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{y-x}{z-x}$$

Acum, $r = \dfrac{y-x}{m} > 0$ ✓

Deci x, y, z sunt termeni în această ordine ai unei progresii aritmetice

Deci $f(x) \le f(y) \le f(z)$ sau $f(x) \ge f(y) \ge f(z$

Contradicție!

(6) S. s. det $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu $xf(x) + yf(y) > xy + f(x) \cdot f(y)$, $(\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$ cu $x \ne y$

$$0 > xy - xf(x) - yf(y) + f(x)f(y)$$

$$0 > y(x - f(y)) - f(x)(x - f(y))$$

$$0 > (y - f(x))(x - f(y))$$

Presupunem $y \neq f(y)$

Alegem $x = f(y) \Rightarrow 0 > \left(y - f(f(y))\right) \cdot \left(\underbrace{f(y) - f(y)}_{=0}\right)$

$0 > 0$ Fals!

Rezultă $f(y) = y$, $(\forall)\, y \in \mathbb{R}$, care verifică!

(P7) Fie $(x_n)_n$ un șir de numere naturale nenule în care fiecare număr apare cel mult o dată.

Arătați că există $N \in \mathbb{N}$ astfel încât $(\forall)\, M \geq N$

$$\sum_{i=N}^{M} \frac{1}{x_i(x_i+1)} < \frac{1}{100}.$$

Dacă șirul ar fi chiar $\mathbb{N}$, adică $x_i = i$

$$\sum_{i=N}^{M} \frac{1}{x_i(x_i+1)} = \sum_{i=N}^{M} \frac{1}{i\cdot(i+1)} = \frac{1}{N} - \frac{1}{M+1} < \frac{1}{N}$$

Deci, pt. $N \geq 101$ ✓

Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$ mulțime finită

$B = \{ i \in \mathbb{N} \mid x_i \in A \}$ -> indicii din șir pt. care x_i e mic.

B e finită, pt. că termenii nu se repetă $|B| \leq 100$

Atunci $(\exists)\ \max B \in \mathbb{N}$

Fie $N = \max B + 1$

Deci $(\forall)\ i \geq N,\ i \notin B \Rightarrow x_i \notin A \Rightarrow x_i \geq 101$

Fie $M > N$

Ordonăm $x_N, x_{N+1}, \dots, x_M$

$a_N < a_{N+1} < \dots < a_M$

Observăm $a_N \geq 101 \Rightarrow a_{N+1} \geq 102 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{N+2} \geq 103 \dots$

$a_M \geq 101 + M - N$

$$\sum_{i=N}^{M} \frac{1}{x_i(x_i+1)} = \sum_{i=N}^{M} \frac{1}{a_i(a_i+1)} \leq \frac{1}{101 \cdot 102} + \frac{1}{102 \cdot 103} +$$

$$+ \dots + \frac{1}{(101+M-N)\cdot(102+M-N)} < \frac{1}{100}$$

$\square$

(P 8) Determinați $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a.î.

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \qquad (\forall)\ x, y \in \mathbb{R}$$

(automorfismele corporiale lui $\mathbb{R}$)

Remarcă: f este crescătoare

Fie $x > 0$

$$f(x) = f((\sqrt{x})^2) = f(\sqrt{x}) \cdot f(\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$$

Fie $x < y$

$$f(y) = f(x + y - x) = f(x) + \underbrace{f(y-x)}_{\geq 0} \geq f(x)$$

$$f(1) = f(1) \cdot f(1) \Rightarrow f(1) \in \{0, 1\}$$

$f \nearrow$ și $f(x+y) = f(x) + f(y)$ și $f(1) \in \{0, 1\}$

$f(0) = 0$

$f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x) \rightsquigarrow$ inducție

$f(nx) = nf(x)$

$n \in \mathbb{N}$

$0 = f(0) = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x)$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(z \cdot x) = z \cdot f(x), (\forall) z \in \mathbb{Z}$

Notăm $f(1) = a$

$$a \cdot m = f(m) = f\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = n \cdot f\left(\frac{m}{n}\right) \Rightarrow a \cdot \frac{m}{n} = f\left(\frac{m}{n}\right)$$

$a \cdot q = f(q), (\forall) q \in \mathbb{Q}$

Dacă $a = 0 \Rightarrow f \equiv 0$ pe $\mathbb{Q}$
f e crescătoare $\Big| \Rightarrow f \equiv 0$ pe $\mathbb{R}$

Dacă $a = 1 \Rightarrow f(q) = q, (\forall) q \in \mathbb{Q}$

Presupunem prin absurd $(\exists) r \in \mathbb{R}$ $f(r) \neq r$

I $f(r) > r \Rightarrow (\exists) q \in (r, f(r)) \cap \mathbb{Q}$

$r < q < f(r)$
f crescătoare $\Rightarrow f(r) \leq f(q) = q$ $\Big| \Rightarrow$ Fals!

II $f(r) < r \Rightarrow (\exists)\ q \in (f(r), r) \cap \mathbb{Q}$

$$\left.\begin{array}{l} f(r) < q < r \\ f \text{ crescătoare} \end{array}\right| \Rightarrow q = f(q) \le f(r)$$

Fals!

Deci $f(r) = r$, $(\forall)\ r \in \mathbb{Q}$.

În concluzie, $f = id$ sau $f \equiv 0$. $\square$

De cugetat: Câte funcții $f : \{1, 2, \dots n\} \to \{1, 2, \dots n\}$ sunt?

a) toate

b) injective

c) surjective → căutați dacă nu știți

d) strict crescătoare

e) crescătoare

f) cu propr. $f(x) - f(y) > 1$, $(\forall)\ x > y$